

Tài liệu bài giảng:

01. CÁC PHÉP BIẾN ĐỔI LƯỢNG GIÁC – P1

Thầy Đặng Việt Hùng

I. CÁC HỆ THỨC LƯỢNG GIÁC CƠ BẢN

- $\sin^2 x + \cos^2 x = 1 \Rightarrow \begin{cases} \sin^2 x = 1 - \cos^2 x \\ \cos^2 x = 1 - \sin^2 x \end{cases}$
- $\frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x \Rightarrow \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x} - 1$
- $\frac{1}{\sin^2 x} = 1 + \cot^2 x \Rightarrow \cot^2 x = \frac{1}{\sin^2 x} - 1$
- $\tan x \cdot \cot x = 1 \Rightarrow \cot x = \frac{1}{\tan x}$
- $\sin^4 x + \cos^4 x = 1 - 2\sin^2 x \cos^2 x$; $\sin^6 x + \cos^6 x = 1 - 3\sin^2 x \cos^2 x$
- $\sin^3 x + \cos^3 x = (\sin x + \cos x)(1 - \sin x \cos x)$; $\sin^3 x - \cos^3 x = (\sin x - \cos x)(1 + \sin x \cos x)$

II. DẤU CỦA CÁC HÀM SỐ LƯỢNG GIÁC

	Góc I	Góc II	Góc III	Góc IV
sinx	+	+	–	–
cosx	+	–	–	+
tanx	+	–	+	–
cotx	+	–	+	–

Ví dụ 1. Tính giá trị của các hàm lượng giác còn lại của cung x sau:

a) $\sin x = \frac{1}{3}; 0 < x < \frac{\pi}{2}$

b) $\cos x = -\frac{2}{\sqrt{5}}; \frac{\pi}{2} < x < \pi$

c) $\tan x = 2; \pi < x < \frac{3\pi}{2}$

d) $\cot x = -\frac{1}{2}; \frac{3\pi}{2} < x < 2\pi$

Hướng dẫn giải:

a) $\sin x = \frac{1}{3} \Leftrightarrow \cos^2 x = 1 - \sin^2 x = 1 - \frac{1}{9} = \frac{8}{9} \Rightarrow \cos x = \pm \frac{2\sqrt{2}}{3}$

Do $0 < x < \frac{\pi}{2} \Rightarrow \cos x > 0 \rightarrow \cos x = \frac{2\sqrt{2}}{3}$.

Từ đó ta được:
$$\begin{cases} \tan x = \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{1}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{4} \\ \cot x = \frac{1}{\tan x} = 2\sqrt{2} \end{cases}$$

b) $\cos x = -\frac{2}{\sqrt{5}} \Rightarrow \sin^2 x = 1 - \cos^2 x = 1 - \frac{4}{5} = \frac{1}{5} \Rightarrow \sin x = \pm \frac{1}{\sqrt{5}}$

Do $\frac{\pi}{2} < x < \pi \Rightarrow \sin x > 0 \rightarrow \sin x = \frac{1}{\sqrt{5}}$.

Từ đó ta được:
$$\begin{cases} \tan x = \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{-1}{2} \\ \cot x = \frac{1}{\tan x} = -2 \end{cases}$$

c) Từ $\tan x = 2 \Rightarrow \cot x = \frac{1}{\tan x} = \frac{1}{2}$

Ta có
$$\begin{cases} \tan x = \frac{\sin x}{\cos x} = 2 \\ \sin^2 x + \cos^2 x = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sin x = 2 \cos x \\ 5 \cos^2 x = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos^2 x = \frac{1}{5} \\ \sin^2 x = \frac{4}{5} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sin x = \pm \frac{2}{\sqrt{5}} \\ \cos x = \pm \frac{1}{\sqrt{5}} \end{cases}$$

Do $\pi < x < \frac{3\pi}{2} \Rightarrow \begin{cases} \sin x < 0 \\ \cos x < 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \sin x = -\frac{2}{\sqrt{5}} \\ \cos x = -\frac{1}{\sqrt{5}} \end{cases}$

d) $\cot x = -\frac{1}{2} \Rightarrow \tan x = \frac{1}{\cot x} = -2$

Ta có
$$\begin{cases} \tan x = \frac{\sin x}{\cos x} = -2 \\ \sin^2 x + \cos^2 x = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sin x = -2 \cos x \\ 5 \cos^2 x = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos^2 x = \frac{1}{5} \\ \sin^2 x = \frac{4}{5} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sin x = \pm \frac{2}{\sqrt{5}} \\ \cos x = \pm \frac{1}{\sqrt{5}} \end{cases}$$

Do $\frac{3\pi}{2} < x < 2\pi \Rightarrow \begin{cases} \sin x < 0 \\ \cos x > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \sin x = -\frac{2}{\sqrt{5}} \\ \cos x = \frac{1}{\sqrt{5}} \end{cases}$

Ví dụ 2. Chứng minh các đẳng thức sau:

a) $\tan^2 x - \sin^2 x = \tan^2 x \sin^2 x$

b) $\frac{\sin x + \cos x - 1}{\sin x - \cos x + 1} = \frac{\cos x}{1 + \sin x}$

c) $1 - \frac{\sin^2 x}{1 + \cot x} - \frac{\cos^2 x}{1 + \tan x} = \sin x \cos x$

d) $\tan x \cdot \tan y = \frac{\tan x + \tan y}{\cot x + \cot y}$

Hướng dẫn giải:

a) $\tan^2 x - \sin^2 x = \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} - \sin^2 x = \frac{\sin^2 x - \sin^2 x \cos^2 x}{\cos^2 x} = \frac{\sin^2 x (1 - \cos^2 x)}{\cos^2 x} = \tan^2 x \sin^2 x \Rightarrow \text{đpcm.}$

b) Áp dụng công thức góc nhân đôi ở phần IV ta được:

$$\frac{\sin x + \cos x - 1}{\sin x - \cos x + 1} = \frac{2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2} - 2 \sin^2 \frac{x}{2}}{2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2} + 2 \sin^2 \frac{x}{2}} = \frac{2 \sin \frac{x}{2} \left(\cos \frac{x}{2} - \sin \frac{x}{2} \right)}{2 \sin \frac{x}{2} \left(\cos \frac{x}{2} + \sin \frac{x}{2} \right)} = \frac{\cos \frac{x}{2} - \sin \frac{x}{2}}{\cos \frac{x}{2} + \sin \frac{x}{2}}, (1)$$

Mặt khác $\frac{\cos x}{1 + \sin x} = \frac{\cos^2 \frac{x}{2} - \sin^2 \frac{x}{2}}{\left(\sin \frac{x}{2} + \cos \frac{x}{2} \right)^2} = \frac{\cos \frac{x}{2} - \sin \frac{x}{2}}{\cos \frac{x}{2} + \sin \frac{x}{2}}, (2).$

Từ (1) và (2) suy ra điều phải chứng minh.

c) $1 - \frac{\sin^2 x}{1 + \cot x} - \frac{\cos^2 x}{1 + \tan x} = 1 - \frac{\sin^2 x}{1 + \frac{\cos x}{\sin x}} - \frac{\cos^2 x}{1 + \frac{\sin x}{\cos x}} = 1 - \frac{\sin^3 x}{\sin x + \cos x} - \frac{\cos^3 x}{\sin x + \cos x} = 1 - \frac{\sin^3 x + \cos^3 x}{\sin x + \cos x} =$

$$= 1 - \frac{(\sin x + \cos x)(\sin^2 x - \sin x \cos x + \cos^2 x)}{\sin x + \cos x} = 1 - (1 - \sin x \cos x) = \sin x \cos x \Rightarrow \text{đpcm.}$$

$$\text{d) } \frac{\tan x + \tan y}{\cot x + \cot y} = \frac{\frac{\sin x}{\cos x} + \frac{\sin y}{\cos y}}{\frac{\cos x}{\sin x} + \frac{\cos y}{\sin y}} = \frac{\frac{\sin x \cos y + \sin y \cos x}{\cos x \cos y}}{\frac{\sin x \cos y + \sin y \cos x}{\sin x \sin y}} = \frac{\sin x \sin y}{\cos x \cos y} = \tan x \tan y \Rightarrow \text{đpcm.}$$

Ví dụ 3: Rút gọn các biểu thức sau

$$A = \frac{\cos^2 x + \cos^2 x \cot^2 x}{\sin^2 x + \sin^2 x \tan^2 x}$$

$$B = \frac{\cos^2 x - 2 \sin x(1 - \sin x)}{(1 - \sin x) \cos x + (1 + \sin x) \cos x} \cdot \frac{2(1 + \sin x)}{1 - \sin x}$$

$$C = (1 + \cot x) \sin^3 x + (1 + \tan x) \cos^3 x - \sin x \cos x$$

$$D = \sqrt{\sin^4 x + 4 \cos^2 x} + \sqrt{\cos^4 x + 4 \sin^2 x}$$

Hướng dẫn giải:

$$\bullet \text{ Ta có } A = \frac{\cos^2 x + \cos^2 x \cot^2 x}{\sin^2 x + \sin^2 x \tan^2 x} = \frac{\cos^2 x + \cos^2 x \cdot \frac{\cos^2 x}{\sin^2 x}}{\sin^2 x + \sin^2 x \cdot \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}} = \frac{\cos^2 x (\sin^2 x + \cos^2 x)}{\sin^2 x (\cos^2 x + \sin^2 x)} = \frac{\cos^4 x}{\sin^4 x} = \cot^4 x$$

• Ta có

$$\frac{\cos^2 x - 2 \sin x(1 - \sin x)}{(1 - \sin x) \cos x + (1 + \sin x) \cos x} = \frac{1 - \sin^2 x - 2 \sin x(1 - \sin x)}{(1 - \sin x + 1 + \sin x) \cos x} = \frac{(1 - \sin x)(1 + \sin x - 2 \sin x)}{2 \cos x} = \frac{(1 - \sin x)^2}{2 \cos x}$$

$$\longrightarrow B = \frac{(1 - \sin x)^2}{2 \cos x} \cdot \frac{2(1 + \sin x)}{1 - \sin x} = \frac{(1 - \sin x)(1 + \sin x)}{\cos x} = \frac{1 - \sin^2 x}{\cos x} = \cos x$$

$$\bullet C = (1 + \cot x) \sin^3 x + (1 + \tan x) \cos^3 x - \sin x \cos x = \left(1 + \frac{\cos x}{\sin x}\right) \sin^3 x + \left(1 + \frac{\sin x}{\cos x}\right) \cos^3 x - \sin x \cos x$$

$$= \sin^3 x + \cos^3 x + \cos x \sin^2 x + \cos^2 x \sin x - \sin x \cos x$$

$$= (\sin x + \cos x)(\sin^2 x + \cos^2 x - \sin x \cos x) + \cos x \sin x(\sin x + \cos x) - \sin x \cos x$$

$$= (\sin x + \cos x)(1 - \sin x \cos x) + \sin x \cos x(\sin x + \cos x - 1) = \sin x + \cos x - \sin x \cos x$$

$$\bullet \text{ Ta có } D = \sqrt{\sin^4 x + 4 \cos^2 x} + \sqrt{\cos^4 x + 4 \sin^2 x} = \sqrt{(1 - \cos^2 x)^2 + 4 \cos^2 x} + \sqrt{(1 - \sin^2 x)^2 + 4 \sin^2 x}$$

$$= \sqrt{\cos^4 x + 2 \cos^2 x + 1} + \sqrt{\sin^4 x + 2 \sin^2 x + 1} = \sqrt{(\cos^2 x + 1)^2} + \sqrt{(\sin^2 x + 1)^2} = \sin^2 x + \cos^2 x + 2 = 3$$

Ví dụ 4. Chứng minh các đẳng thức sau:

$$\text{a) } \frac{\sin^2 x}{\sin x - \cos x} - \frac{\sin x + \cos x}{\tan^2 x - 1} = \sin x + \cos x$$

$$\text{b) } 1 - \cot^4 x = \frac{2}{\sin^2 x} - \frac{1}{\sin^4 x}$$

$$\text{c) } \frac{1 + \sin^2 x}{1 - \cos^2 x} = 1 + 2 \cot^2 x$$

$$\text{d) } 2(1 - \sin x)(1 + \cos x) = (1 - \sin x + \cos x)^2$$

$$\text{e) } \frac{\sin^2 x(1 + \cos x)}{\cos^2 x(1 + \sin x)} = \frac{\sin x + \tan x}{\cos x + \cot x}$$

$$\text{f) } \frac{\cos^2 x - \sin^2 x}{\cot^2 x - \tan^2 x} = \sin^2 x \cdot \cos^2 x$$

$$\text{g) } \frac{1 - 4 \sin^2 x \cos^2 x}{(\sin x + \cos x)^2} = (\sin x - \cos x)^2$$

$$\text{h) } \frac{\sin^2 x - \cos^2 x + \cos^4 x}{\cos^2 x - \sin^2 x + \sin^4 x} = \tan^4 x$$

Ví dụ 5: Rút gọn các biểu thức sau

$$\text{a) } A = \frac{1 - \cos x}{\sin^2 x} - \frac{1}{1 + \cos x}$$

$$\text{b) } B = \frac{1 - \sin^2 x \cdot \cos^2 x}{\cos^2 x} - \cos^2 x$$

$$\text{c) } C = \sqrt{\frac{1 - \cos x}{1 + \cos x}} - \sqrt{\frac{1 + \cos x}{1 - \cos x}}$$

$$\text{d) } D = \sqrt{1 - \cot^2 x \cdot \sin^2 x} + 1$$

Ví dụ 6: Tính giá trị của các hàm số lượng giác

$$\text{a) } \sin x = \frac{1}{\sqrt{3}}; 0 < x < \frac{\pi}{2}$$

$$\text{b) } \cot x = -\sqrt{2}; -\frac{\pi}{2} < x < 0$$

$$\text{c) } \tan x + \cot x = 2; 0 < x < \frac{\pi}{2}$$

$$\text{d) } \cos x = \frac{2}{\sqrt{6}}; \pi < x < \frac{3\pi}{2}$$

$$\text{e) } \tan x - \cot x = -\frac{2}{\sqrt{3}}; \pi < x < \frac{3\pi}{2}$$

$$\text{f) } \tan x = -\frac{1}{\sqrt{3}}; \frac{\pi}{2} < x < \pi$$

Ví dụ 7: Chứng minh các đẳng thức sau

$$\text{a) } \frac{\tan x}{\sin x} - \frac{\sin x}{\cot x} = \cos x$$

$$\text{b) } \frac{\sin^4 x + \cos^4 x - 1}{\sin^6 x + \cos^6 x - 1} = \frac{2}{3}$$

$$\text{c) } \frac{1 + \sin^2 x}{1 - \sin^2 x} = 1 + 2 \tan^2 x$$

$$\text{d) } \frac{\sin^2 x - \tan^2 x}{\cos^2 x - \cot^2 x} = \tan^6 x$$

Ví dụ 8: Chứng minh các đẳng thức sau

$$\text{a) } \frac{\sin x + \cos x - 1}{1 - \cos x} = \frac{2 \cos x}{\sin x - \cos x + 1}$$

$$\text{b) } \frac{1}{\sin^2 x \cdot \cos^2 x} = 2 + \tan^2 x + \cot^2 x$$

$$\text{c) } \frac{\sin^4 x + 3 \cos^4 x - 1}{\sin^6 x + \cos^6 x + 3 \cos^4 x - 1} = \frac{3}{2}$$

$$\text{d) } \cos^2 x (2 \sin^2 x + \cos^2 x) = 1 - \sin^4 x$$

Ví dụ 9: Chứng minh các đẳng thức sau

$$\text{a) } (\cos x + 1 + \sin x)(\cos x - 1 + \sin x) = 2 \sin x \cos x$$

$$\text{b) } (1 - \sin x + \cos x)^2 = 2(1 - \sin x)(1 + \cos x)$$

$$\text{c) } \cos^4 x - \sin^4 x = \cos^2 x (1 - \tan x)(1 + \tan x)$$

$$\text{d) } \sin^3 x (1 + \cot x) + \cos^3 x (1 + \tan x) = \sin x + \cos x$$

Ví dụ 10: Chứng minh rằng các biểu thức sau không phụ thuộc vào x?

$$\text{a) } A = \frac{2}{\tan x - 1} + \frac{\cot x + 1}{\cot x - 1}$$

$$\text{b) } B = 2 \cos^4 x - \sin^4 x + \sin^2 x \cos^2 x + 3 \sin^2 x$$

$$\text{c) } C = \frac{\tan^2 x - \sin^2 x}{\cot^2 x - \cos^2 x} \cdot \cot^6 x$$

$$\text{d) } D = \sin^2 x \cdot \tan^2 x + 4 \sin^2 x - \tan^2 x + 3 \cos^2 x$$

Ví dụ 11: Tính giá trị biểu thức

$$A = \frac{\cos^3 x + \cos x \cdot \sin^2 x - \sin x}{\sin^3 x - \cos^3 x}, \text{ với } \tan x = 2.$$

$$B = \frac{1 + \cos x + \sin x}{1 - \cos x}, \text{ với } \cos x = -\frac{12}{13} \text{ và } \pi/2 < x < \pi$$

$$C = \frac{2 \sin^2 x + \sin x \cdot \cos x + \cos^2 x}{\sin^4 x - \cos^4 x}, \text{ với } \tan x = 3.$$